

УДК 532.5:532.135

Кузяєв І.М., Начовний І.І., Богуцька Є.О.,  
Хорольський М.С.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У МІЖДИСКОВИХ ЗАЗОРАХ ЧЕРВ'ЯЧНО-ДИСКОВИХ ЕКСТРУДЕРІВ. ЧАСТИНА 2: РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Розглянути неізотермічні процеси, що відбуваються в міжdiskових зазорах черв'ячно-diskових екструдерів з урахуванням розподілу температурного поля вздовж висоти та радіусу.

### MATHEMATICAL SIMULATION OF PROCESSES IN INTERDISK CLEARANCES WORM-DISK EXTRUDERS. PART 1: CALCULATION OF TEMPERATURE FIELDS

The nonisothermal processes are surveyed which happen in interdisk clearances of worm-disk extruders in view of allocation of a temperature field along height and radius.

Основні положення, які були розглянуті у першій частині даної статті, залишаються справедливими й в даному випадку, а саме, рівняння руху, РРС, тощо. Однак, крім цих рівнянь необхідно ще й урахувати рівняння збереження теплової енергії, яке в загальному вигляді для циліндричної системи координат подається у такому вигляді

$$\begin{aligned} \rho \cdot C_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} + V_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & - \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot q_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + \\ & + \sigma_r \cdot \frac{\partial V_r}{\partial r} + \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_r \right) + \sigma_{zz} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial z} + \sigma_{r\varphi} \cdot \left[ r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] + \\ & + \sigma_{rz} \cdot \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + \sigma_{\varphi z} \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

де  $T$  — температура;

$C_p$  — коефіцієнт теплоємності;

$q_i$  — компоненти тензора теплового потоку.

З урахуванням зроблених раніше припущень, вираз (1) спрощується до вигляду

$$\rho C_p V_r \frac{\partial T}{\partial r} = - \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] + \sigma_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{V_r}{r} + \sigma_{r\varphi} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\varphi}{r} \right) + \sigma_{rz} \frac{\partial V_r}{\partial z} + \sigma_{\varphi z} \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Внаслідок геометричної конфігурації міжdiskового зазору, де виконується умова  $r \gg H$ , і можливості регулювання температури на поверхнях рухомого й нерухомого diskів, перенесення теплової енергії за рахунок теплопровідності вздовж осі  $z$  набагато більші, ніж вздовж осі  $r$ . Тому рівняння (2) можна спростити до такого виразу

$$\rho \cdot C_p \cdot V_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} + \sum_{i,j} \sigma_{i,j} \cdot \begin{pmatrix} (A_1)_{i,j} & \text{при } i \neq j \\ d_{i,j} & \text{при } i = j \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Компоненти вектора теплового потоку можна подати через закон Фур'є. У даному вигляді маємо

$$q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (4)$$

де  $\lambda$  — коефіцієнт теплопровідності.

З урахуванням рівняння (4) формула (3) запишеться таким чином

$$\rho \cdot C_p \cdot V_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + F_{dis}(r, z). \quad (5)$$

Для системи координат, яка показана на рис. 1 у першій частині даної статті, граничні й початкові умови можуть бути подані так

$$T = T_p \text{ при } z = H/2, \quad (6)$$

$$T = T_K \text{ при } z = -H/2, \quad (7)$$

$$T = T_n \text{ при } r = RV(R_n), \quad (8)$$

де  $T_p$  — температура поверхні рухомого диска;  
 $T_K$  — температура поверхні корпусу дисквої зони;  
 $T_n$  — початкова температура на вході у зазор.

Співвідношення  $r = RV$  буде справедливим для першого міждисккового зазору, а  $r = R_n$  — для другого міждисккового зазору.

У рівнянні (5) введено позначення  $F_{dis}(r, z)$  — функція дисипації, яка включає в себе суму комплексів із добуток компонентів тензора напружень на компоненти тензора швидкостей деформацій. Крім того, рівняння (5) отримано з урахуванням припущення, що коефіцієнт теплопровідності не залежить від температури.

Рівняння (5) являє собою диференціальне рівняння в частинних похідних. Розв'язання цього рівняння будемо здійснювати за допомогою операційного методу [1, 2]. Причому перетворення Лапласа будемо виконувати за координатою  $r$ , тому що для перетворення Лапласа першої похідної необхідно знати початкову умову тільки самої величини, а для другої похідної — ще і початкову умову її першої похідної.

Необхідно також відзначити, що крім температури, за якою буде виконуватися перетворення Лапласа, існують ще дві функції, які залежать від координати  $r$ , а саме  $V_r$  і  $F_{dis}$ . Однак, у подальшому будемо приймати, що функції  $V_r$  і  $F_{dis}$  будуть фіксованими, як вздовж координати  $r$ , так і вздовж координати  $z$ . Останнє припущення буде справедливим, якщо всю дисккову область розіб'ємо сіткою вздовж двох координат. Тоді рівняння (5) можна подати у такому вигляді

$$\rho \cdot C_p \cdot (V_r)_{i,j} \cdot \frac{\partial T_{i+1,j}}{\partial r_i} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T_{i+1,j}}{\partial z_j^2} + (F_{dis})_{i,j}, \quad (9)$$

де  $i$  – кількість елементів розбиття вздовж координати  $r$ ;  
 $j$  – кількість елементів розбиття вздовж координати  $z$ .

Після перетворення рівняння (9) за Лапласом вздовж координати  $r$  і деякого перегрупування, отримуємо наступний вираз

$$\frac{d^2 \Theta_{i+1,j}}{dz_j^2} - AV_{i,j} \cdot s_i \cdot \Theta_{i+1,j} = -AV_{i,j} \cdot T_{i,j} - \frac{FD_{i,j}}{s_i}, \quad (10)$$

де  $\Theta$  – зображення температури  $T$ ;

$s$  – змінна інтегралу Лапласа;

$T_{i,j}$  – початкове значення температури (при  $i = 0 \rightarrow T_{i,j} = T_n$ );

$AV_{i,j}$ ,  $FD_{i,j}$  – комплекси, які знаходяться за виразами

$$AV_{i,j} = \frac{\rho \cdot C_p \cdot (V_r)_{i,j}}{\lambda}; \quad (11)$$

$$FD_{i,j} = \frac{(F_{dis})_{i,j}}{\lambda}. \quad (12)$$

Щоб записати рішення для рівняння (10), необхідно мати на увазі, що значення для  $V_r$  можуть мати як негативні, так і позитивні значення. Таким чином, відповідні значення будуть мати й комплекси  $AV_{i,j}$ . Якщо  $V_r$  має позитивні значення, то рішення для виразу (10) буде таким [3]

$$\Theta_{\rho_{i+1,j}} = \frac{T_{i,j}}{s_i} + \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} + C_1 \cdot \operatorname{sh}(\sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j) + C_2 \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j) \quad (13)$$

де 
$$FV_{i,j} = \frac{FD_{i,j}}{AV_{i,j}}. \quad (14)$$

У випадку, коли  $V_r$  буде мати негативне значення, то рішення для виразу (10) можна записати таким чином

$$\Theta_{\rho_{i+1,j}} = \frac{T_{i,j}}{s_i} - \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} + C_3 \cdot \sin(\sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j) + C_4 \cdot \cos(\sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j). \quad (15)$$

Необхідно зауважити, що величини  $AV_{i,j}$  під коренем квадратним у рівнянні (15) треба підставити зі знаком плюс.

Таким чином, для першого міждискового зазору при нормальній роботі екструдера буде справедлива формула (15), а для другого – формула (13).

Перетворення Лапласа граничних умов (6) і (7) запишуться так

$$\Theta_{i+1,j} = \frac{T_p}{s_i} \quad \text{при } z_j = H/2, \quad (16)$$

$$\Theta_{i+1,j} = \frac{T_k}{s_i} \quad \text{при } z_j = -H/2. \quad (17)$$

Знайдемо спочатку рішення для рівняння (13). Підстановка граничних умов (16) і (17) у рівняння (13) дає

$$\frac{T_p}{s_i} = \frac{T_{i,j}}{s_i} + \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} + C_1 \cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right) + C_2 \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right),$$

$$\frac{T_K}{s_i} = \frac{T_{i,j}}{s_i} + \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} - C_1 \cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right) + C_2 \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right).$$

Після визначення констант інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  із двох останніх рівнянь і підстановки їх у формулу (13) отримуємо такий вираз

$$\Theta_{\rho_{i,j}} = \frac{T_n}{s_i} + \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} + \frac{T_p - T_K}{2 \cdot s_i} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot z_j\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{(T_p + T_K - 2 \cdot T_{i,j})}{2 \cdot s_i} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot z_j\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right)} - \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot z_j\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{AV_{i,j}} \cdot s_i \cdot \frac{H}{2}\right)}. \quad (18)$$

Для того, щоб перейти від зображення до оригіналу температури, необхідно відшукати оригінали кожного з п'яти членів у правій частині рівняння (18). При перетвореннях для визначення оригіналу індекси  $i$  та  $j$  для спрощення виразів записувати не будемо.

Оригінали першого й другого членів мають у літературі [1, 2]

$$\frac{T_{i,j}}{s_i} \rightarrow T_{i,j}, \quad (19)$$

$$\frac{FV_{i,j}}{s_i^2} \rightarrow FV_{i,j} \cdot r_i. \quad (20)$$

Для визначення оригіналу третього члена подамо гіперболічні синуси через показникові функції, а саме

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

З урахуванням останнього виразу третій член у рівнянні (18) можна записати таким чином

$$\frac{T_p - T_K}{2 \cdot s} \left\{ \exp\left[\sqrt{AV} \cdot s \cdot \left(z - \frac{H}{2}\right)\right] - \exp\left[-\sqrt{AV} \cdot s \cdot \left(z + \frac{H}{2}\right)\right] \right\} \cdot \left[1 - \exp\left(-2\sqrt{AV} \cdot s \cdot \frac{H}{2}\right)\right]^{-1}. \quad (21)$$

У зв'язку з тим, що показникові функції з від'ємним степенем завжди менше одиниці, то вираз, який стоїть у степені мінус одиниця, можна розкласти в біноміальний ряд

$$\left[1 - \exp\left(-2\sqrt{AV} \cdot s \cdot H\right)\right]^{-1} = 1 + \exp\left(-\sqrt{AV} \cdot s \cdot H\right) + \exp\left(-2\sqrt{AV} \cdot s \cdot H\right) + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-k\sqrt{AV} \cdot s \cdot H\right). \quad (22)$$

З урахуванням виразу (22) рівняння (21) можна записати таким чином

$$\frac{T_p - T_K}{2} \cdot \left[ \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha_k \sqrt{s}) - \frac{1}{s} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\beta_k \sqrt{s}) \right], \quad (23)$$

де 
$$\alpha_k = \sqrt{AV} \cdot [-z + H \cdot (1 + 2 \cdot k)], \quad (24)$$

$$\beta_k = \sqrt{AV} \cdot [z + H \cdot (1 + 2 \cdot k)]. \quad (25)$$

Для визначення оригіналу виразу (23) можна скористатися наступним відомим співвідношенням між оригіналом і зображенням

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2 \cdot \sqrt{r}}\right) \rightarrow \frac{1}{s} \cdot e^{-a \cdot \sqrt{s}}. \quad (26)$$

Тоді остаточно для оригіналу третього члена в рівнянні (18) можна записати такий вираз

$$\frac{T_p - T_K}{2} \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_k}{2 \cdot \sqrt{r}}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta_k}{2 \cdot \sqrt{r}}\right) \right]. \quad (27)$$

Функції, які стоять у квадратних дужках рівняння (27), можна в загальному вигляді подати так

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad (28)$$

де  $\operatorname{erf}(x)$  — функція помилок, яка має вигляд

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\psi^2} d\psi. \quad (29)$$

Для даного випадку аргумент  $x$  має вигляд

$$\frac{\alpha_k}{2 \cdot \sqrt{r}} \quad \text{та} \quad \frac{\beta_k}{2 \cdot \sqrt{r}}.$$

Щоб визначити оригінал четвертого члена в рівнянні (18), треба використати другу теорему розкладання, маючи на увазі те, що полюси будуть такі

$$s_0 = 0, \quad s_k = -\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2} \cdot (2 \cdot k - 1)^2, \quad (30)$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots$

Згідно з другою теоремою розкладання перехід від зображення до оригіналу відбувається за такою формулою

$$\frac{A(s)}{sB(s)} \rightarrow \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(s_k)}{s_k B'(s_k)} e^{s_k \cdot r}, \quad (31)$$

де  $A(s)$  — чисельник виразу у зображенні;  
 $B(s)$  — знаменник виразу у зображенні;  
 $B'(s)$  — похідна від  $B(s)$  за  $s$  при  $s = s_k$ ;  
 $A(0), B(0)$  — значення  $A(s)$  і  $B(s)$  при  $s = 0$ .

У нашому випадку для четвертого члена рівняння (18) можна записати

$$A(s) = \frac{T_p - T_K - 2 \cdot T_n}{2} \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{AV \cdot s} \cdot z),$$

$$B(s) = \operatorname{ch}\left(\sqrt{AV \cdot s} \cdot \frac{H}{2}\right).$$

Тоді для елементів правої частини (31) будуть справедливі такі вирази

$$A(0) = \frac{T_p - T_K - 2 \cdot T_n}{2}; \quad B(0) = 1;$$

$$A(s_k) = \frac{T_p - T_K - 2T_n}{2} \operatorname{ch}\left(\sqrt{AV \cdot \left[-\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2}(2k-1)^2\right]} \cdot z\right) =$$

$$= \frac{T_p - T_K - 2T_n}{2} \operatorname{ch}\left[\frac{z}{H}(2k-1)\pi i\right] = \frac{T_p - T_K - 2T_n}{2} \cos\left[\frac{z\pi}{H}(2k-1)\right];$$

$$s_k \cdot B'(s_k) = s_k \operatorname{ch}\left(\sqrt{AV \cdot s_k} \frac{H}{2}\right) \sqrt{AV} \cdot \frac{H}{2} \frac{1}{2\sqrt{s_k}} = \frac{\pi}{4} i(2k-1) \operatorname{sh}\left[\frac{\pi(2k-1)}{2}\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{4}(2k-1) \sin\left[\frac{\pi}{2}(2k-1)\right] = (-1)^k \frac{\pi}{2}(2k-1).$$

З урахуванням останніх виразів для оригіналу четвертого члена у рівнянні (18) можна записати

$$\frac{T_p + T_K}{2} - T_n + \frac{2(T_p - T_K - 2T_n)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \cdot \cos\left[\frac{z\pi}{H}(2k-1)\right] \exp\left[-\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2}(2k-1)^2 r\right]. \quad (32)$$

Для визначення оригіналу п'ятого члена виразу (18) подамо його у вигляді

$$\frac{\varphi(s)}{s}, \quad (33)$$

де

$$\varphi(s) = \frac{FV \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{AV \cdot s} \cdot z_1)}{s \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{AV \cdot s} \cdot \frac{H}{2}\right)}. \quad (34)$$

Для отримання оригіналу від виразу (33) можна використати теорему інтегрування оригіналу у вигляді

$$\int_0^r f(r) dr \rightarrow \frac{\varphi(s)}{s}, \quad (35)$$

де  $f(r)$  — оригінал зображення  $\varphi(s)$ .

Для визначення оригіналу  $\varphi(s)$  можна використати також другу теорему розкладання та, за аналогією з тим, як був отриманий вираз (32), можна записати

$$\varphi(s) \rightarrow f(r) = FV \cdot \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \cos\left[\frac{z\pi}{H}(2k-1)\right] \exp\left[-\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2}(2k-1)^2 r\right] \right\}. \quad (36)$$

Підстановка правої частини формули (36) у підінтегральний вираз (35) і наступне інтегрування дає таке співвідношення для оригіналу п'ятого члена рівняння (18)

$$FV \cdot r + \frac{4 \cdot H^2 \cdot AV \cdot FV}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cdot \cos \left[ \frac{z\pi}{H} \cdot (2k-1) \right] \cdot \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2} (2k-1)^2 r \right] \right\}. \quad (37)$$

Таким чином, з урахуванням рівнянь (18), (19), (20), (27), (32) і (37), остаточно можна записати оригінал для температури (ураховуючи розбивання на окремі відрізки, тобто індекси  $i$  та  $j$ , та маючи на увазі вираз (14))

$$\begin{aligned} T_{\rho_{i+1,j}} = & \frac{T_{\rho} + T_K}{2} + \frac{T_{\rho} - T_K}{2} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha_{k,i,j}}{2\sqrt{r_i}} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta_{k,i,j}}{2 \cdot \sqrt{r_i}} \right) \right] + \\ & + \frac{2(T_{\rho} + T_K - 2T_{i,j})}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \cos \left[ \frac{z_j \cdot \pi}{H} (2k-1) \right] \exp \left[ -\frac{\pi^2}{AV_{i,j} \cdot H^2} (2k-1)^2 r_i \right] - \\ & - \frac{4H^2 \cdot FD_{i,j}}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cos \left[ \frac{z_j \pi}{H} (2k-1) \right] \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\pi^2}{AV_{i,j} \cdot H^2} (2k-1)^2 r_i \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Розв'яжемо далі рівняння (15). При цьому граничні умови (16) і (17) будуть також справедливими. Тоді замість рівняння (18) будемо мати

$$\begin{aligned} \Theta_{n_{i+1,j}} = & \frac{T_{i,j}}{s_i} - \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} + \frac{T_{\rho} - T_K}{2s_i} \cdot \frac{\sin \left( \sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j \right)}{\sin \left( \sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot \frac{H}{2} \right)} + \\ & + \frac{T_{\rho} + T_K - 2T_{i,j}}{2s_i} \cdot \frac{\cos \left( \sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j \right)}{\cos \left( \sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot \frac{H}{2} \right)} + \frac{FV_{i,j}}{s_i^2} \cdot \frac{\cos \left( \sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot z_j \right)}{\cos \left( \sqrt{AV_{i,j} \cdot s_i} \cdot \frac{H}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для рівняння (39) співвідношення (19) і (20) будуть вірними. Щоб знайти оригінал для третього члена в рівнянні (39), можна скористатися наступним співвідношенням

$$\sin(z) = -i \cdot \operatorname{sh}(i \cdot z) = -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2},$$

де  $i$  — уявна одиниця.

З урахуванням останнього виразу можна виконати перетворення, які аналогічні рівнянням (21) — (23). Тобто можна записати

$$\frac{T_{\rho} - T_k}{2} \cdot \left[ \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha_{1k} \cdot \sqrt{s}) - \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\beta_{1k} \cdot \sqrt{s}) \right], \quad (40)$$

де  $\alpha_{1k} = i \cdot \sqrt{AV} \cdot [-z + H(1+2k)]$ ;

$\beta_{1k} = i \cdot \sqrt{AV} \cdot [z + H(1+2k)]$ .

Якщо урахувати той факт, що величина  $AV$  має негативне значення, то можна записати

$$\sqrt{-AV} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{AV} = i \cdot \sqrt{AV},$$

де  $AV$  буде вже позитивною величиною.

Тоді для оригіналу третього члена у рівнянні (39) з урахуванням останніх співвідношень і парності функції  $\operatorname{erf}$  буде також справедливим вираз (27).

Для визначення оригіналу четвертого члена в рівнянні (39) можна скористатися другою теоремою розкладання у вигляді (31). Тоді полюси запишуться у вигляді

$$s_0 = 0; \quad s_k = -\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2} \cdot (2k-1)^2. \quad (41)$$

Таким чином, для четвертого члена в рівнянні (39) можна записати такі співвідношення

$$A(0) = \frac{T_p + T_K - 2T_n}{2};$$

$$A(s_k) = \frac{T_p + T_K - 2T_n}{\pi} \cos\left[\frac{z \cdot \pi}{H} \cdot (2 \cdot k - 1)\right];$$

$$s_k B'(s_k) = -s_k \sin\left(\sqrt{AV \cdot s_k} \frac{H}{2}\right) \sqrt{AV} \cdot \frac{H}{2} \frac{1}{2\sqrt{s_k}} = -\frac{\pi}{4} (2k-1) \sin\left[\frac{\pi}{2} (2k-1)\right] = (-1)^k \frac{\pi}{4} (2k-1).$$

Ураховуючи останні вирази, остаточно для оригіналу четвертого члена в рівнянні (39) можна записати такий вираз

$$\frac{T_p + T_K}{2} - T_n + \frac{2(T_p + T_K - 2T_n)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \cdot \cos\left[\frac{z\pi}{H} (2k-1)\right] \exp\left[\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2} (2k-1)^2 r\right]. \quad (42)$$

Маючи на увазі, що  $AV$  являє собою негативну величину, то вираз (36) співпадає з виразом (32).

Тоді, за аналогією з тим, як була отримана формула (37), можна записати наступний вираз для оригіналу п'ятого члена в рівнянні (39)

$$FV \cdot r + \frac{4H^2 \cdot AV \cdot FV}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cos\left[\frac{z\pi}{H} (2k-1)\right] \left\{ \exp\left[\frac{\pi^2}{AV \cdot H^2} (2k-1)^2 r\right] - 1 \right\}. \quad (43)$$

Остаточно для оригіналу температури за формулою (39) можна також використовувати вираз (38), але величину  $AV_{i,j}$  треба привести з позитивним значенням.

Розрахунок температурного поля за формулою (38) виконано згідно програми, яка є у авторів. Розподіл температури приведено на рис. 1 – рис. 3.

Необхідно відзначити, що рис. 1 – рис. 3 отримані згідно з програмою для наведених на початку програми вихідних даних.

На рис. 4 наведені графіки, які також отримані за програмою, але при інших вихідних даних.

З наведених графіків видно значний вплив висоти diskового зазору та радіуса диска на поле розподілу температур. Так, для diskового зазо-



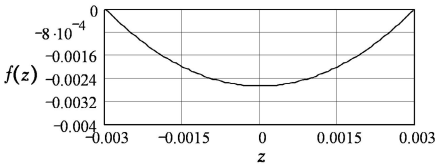


Рис. 1 – Графік розподілу градієнту тиску

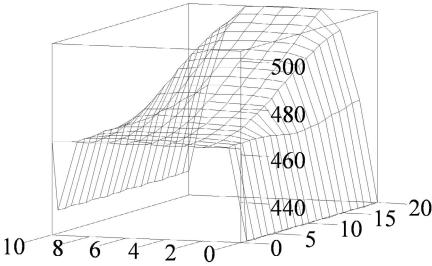


Рис. 2 – Об'ємний графік розподілу температури в міждисковому зазорі

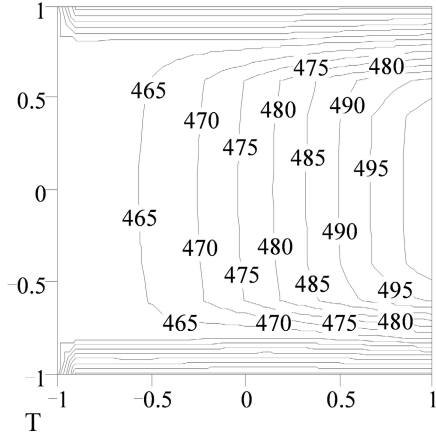
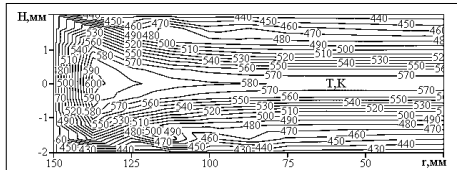


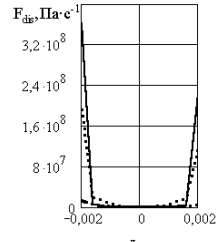
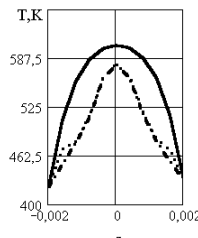
Рис. 3 – Розподіл температури в міждисковому зазорі у вигляді графіка ліній рівня

ру з висотою 8 мм і зовнішнім радіусом 100 мм (рис. 3), максимальна температура складає 498,4 К, що в принципі є граничним значенням для поліетилену. Якщо ж висота зазору зменшується до 4 мм з одночасним збільшенням радіуса до 150 мм (рис. 4), то максимальна температура вже складає 603,9 К, що приведе до деструкції поліетилену.

У реальних умовах роботи черв'ячно-дискового екструдера задати на поверхнях дисків граничні умови першого роду, а саме, температури не можна. Існують різні конструкції робочих органів, у яких зовнішні торцеві поверхні дисків можуть мати системи термостабілізації (охолодження й підігрівання). У даному випадку для визначення температури на границях, тобто на внутрішніх торцевих поверхнях дисків, можна використати граничні умови другого роду, які можна записати таким чином



а – графік ліній рівня для температури ( $T_{max} = 603,9 \text{ К}$ )



б – залежність температури вдовж висоти міждискового зазору  
в – залежність функції дисипації вдовж висоти міждискового зазору  
—  $r = 137,5 \text{ мм}$ ; .....  $r = 87,5 \text{ мм}$ ;  
- - -  $r = 25 \text{ мм}$

Рис. 4 – Розподіл температурного поля та функції дисипації в міждисковому зазорі ( $H = 4 \text{ мм}$ ;  $R_n = 0,15 \text{ м}$ ;  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ )

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = q_p \quad \text{при } z = H/2, \quad (44)$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = q_K \quad \text{при } z = -H/2. \quad (45)$$

Знак мінус у рівнянні (44) поставлений тому, що тепловий потік, який направлений в міждискковий простір, має зворотний напрямок координаті  $z$ .

Тепловий потік на границі обертового диску складається з двох частин: перша частина, за рахунок дисипативного виділення, йде в міждискковий зазор, а друга частина, за рахунок теплопровідності матеріалу диска та його охолодження відводиться з робочої зони. Дисипативне виділення відбувається внаслідок сил тертя, які з'являються між матеріалом і поверхнею диска, при обертанні останнього. Для нерухомого диска ураховується тільки друга частина теплового потоку. Таким чином можна записати наступні співвідношення

$$q_p = V_\omega(r) \cdot f_m \cdot \rho(r) - \frac{\lambda_p}{H_p} \cdot \left[ T\left(\frac{H}{2}, r\right) - T_p(H_p, r) \right], \quad (46)$$

$$q_K = -\frac{\lambda_K}{H_K} \cdot \left[ T\left(-\frac{H}{2}, r\right) - T_K(H_K, r) \right], \quad (47)$$

де  $\lambda_p, \lambda_m$  — коефіцієнти теплопровідності матеріалу, відповідно, рухомого й нерухомого дисків;  
 $H_p, H_m$  — товщини стінок, відповідно, рухомого й нерухомого дисків;  
 $T_p(H_p, r), T_K(H_K, r)$  — значення температур на зовнішніх поверхнях, відповідно, рухомого й нерухомого дисків;  
 $f_m$  — коефіцієнт тертя між поверхнею рухомого диска й матеріалом, що переробляється;  
 $V_\omega(r)$  — колова швидкість рухомого диска, яку можна визначити з формули (18) у частині 1 при  $z = H/2$ ;  
 $\rho(r)$  — розподіл тиску в міждискковому зазорі, який в залежності від типу течії може бути визначений за однією з формул (43) і (58) із першої частини.

Необхідно відзначити, що на величину коефіцієнту тертя  $f_T$  великий вплив має температура. Тому, при розрахунках температурного поля з урахуванням рівняння (46) необхідно мати апроксимаційні залежності коефіцієнту тертя від температури.

У даному випадку буде справедливим рівняння теплового балансу (39) та його зображення (10). Рішення (13) і (15) будуть також справедливі при виконанні співвідношень (11), (12) і (14). Однак для визначення констант інтегрування  $C_1, C_2, C_3, C_4$  необхідно скористатися гра-

ничними умовами (44) і (45), які після перетворення Лапласа можна записати так

$$-\lambda \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{q_p}{s} \quad \text{при } z = H/2, \quad (48)$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{q_k}{s} \quad \text{при } z = -H/2. \quad (49)$$

Щоб знайти константи інтегрування  $C_1$  і  $C_2$ , необхідно здиференціювати рівняння (13) за координатою  $z$  і підставити граничні умови (48) і (49)

$$\begin{aligned} \frac{-q_p}{s \cdot \lambda} &= C_1 \cdot \sqrt{AV \cdot s} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{AV \cdot s} \cdot H}{2}\right) + C_2 \cdot \sqrt{AV \cdot s} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{AV \cdot s} \cdot H}{2}\right), \\ \frac{q_k}{s \cdot \lambda} &= C_1 \cdot \sqrt{AV \cdot s} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{AV \cdot s} \cdot H}{2}\right) - C_2 \cdot \sqrt{AV \cdot s} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{AV \cdot s} \cdot H}{2}\right). \end{aligned}$$

Індекси  $i$  та  $j$  у двох останніх рівняннях для спрощення запису опущені.

Визначаючи константи інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  із двох останніх рівнянь та підставляючи їх у формулу (13), вираз для зображення температури в даному випадку можна записати таким чином

$$\Theta = \frac{T_n}{s} + \frac{FV}{s^2} + \frac{(q_k - q_p)}{2\lambda\sqrt{AV \cdot s}} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{AV \cdot s} \cdot z)}{\sqrt{s} \cdot \operatorname{ch}(\sqrt{AV \cdot s} \cdot H/2)} - \frac{(q_k + q_p)}{2\lambda\sqrt{AV \cdot s}} \cdot \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{AV \cdot s} \cdot z)}{\sqrt{s} \cdot \operatorname{sh}(\sqrt{AV \cdot s} \cdot H/2)}. \quad (50)$$

Рівняння (50) для спрощення записане без індексів  $i$  та  $j$ .

Оригіналами перших двох членів у правій частині рівняння (50) будуть, відповідно, рівняння (19) і (20). Для визначення оригіналів третього та четвертого членів виразимо гіперболічні функції через показникові та, за аналогією з тим, як було отримане рівняння (23), можна знайти наступні вирази

$$A_1 \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \exp(-b_{1k} \sqrt{s}) - \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \exp(-b_{2k} \sqrt{s}) \right], \quad (51)$$

$$A_2 \frac{1}{s} \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-b_{1k} \sqrt{s}) + \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-b_{2k} \sqrt{s}) \right], \quad (52)$$

де  $A_1 = \frac{(q_k - q_p)}{2\lambda\sqrt{AV}}$ ,  $A_2 = \frac{(q_k + q_p)}{2\lambda\sqrt{AV}}$ ,  $b_{1k} = \sqrt{AV} \left[ -z + \frac{H}{2}(2k+1) \right]$ ,  $b_{2k} = \sqrt{AV} \left[ z + \frac{H}{2}(2k+1) \right]$ .

Для визначення оригіналів (51) і (52) можна використати табличне значення перетворення Лапласа

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{4r}}}{\sqrt{\pi \cdot r}} \rightarrow \frac{e^{-a \cdot \sqrt{s}}}{\sqrt{s}},$$

а також теорему множення або теорему інтегрування оригіналу.

У результаті для виразів (51) і (52) можна записати, відповідно, такі оригінали

$$A_1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{1k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot B_{2k} \right), \quad (53)$$

$$A_2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \right), \quad (54)$$

де

$$B_{1k} = b_{1k} \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{b_{1k}}{2\sqrt{r}} \right) - 1 \right] + 2\sqrt{\frac{r}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(b_{1k})^2}{4r} \right], \quad (55)$$

$$B_{2k} = b_{2k} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{b_{2k}}{2\sqrt{r}} \right) - 1 \right] + 2\sqrt{\frac{r}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(b_{2k})^2}{4r} \right]. \quad (56)$$

Таким чином, остаточно для розподілу температури у міжвалковому просторі (у випадку позитивного значення радіальної швидкості) маємо такий вираз (з урахуванням розбиття на вузлові точки, тобто індекси  $i$  та  $j$ )

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + FV_{i,j}r_i + A_{1i,j} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{1k,i,j} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k,i,j} \right) - A_{2i,j} \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_{1k,i,j} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k,i,j} \right). \quad (57)$$

Якщо об'єднати комплекси при теплових потоках  $qK$  та  $q\rho$ , то останнє рівняння можна привести до вигляду

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + FV_{i,j}r_i - \frac{qK_i}{\lambda\sqrt{AV_{i,j}}} \left( \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{1k,i,j} + \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{2k,i,j} \right) - \frac{q\rho_i}{\lambda\sqrt{AV_{i,j}}} \left( \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{1k,i,j} + \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{2k,i,j} \right). \quad (58)$$

При розрахунках за рівнянням (58) необхідно урахувувати залежність теплових потоків  $qK$  та  $q\rho$  від температури згідно з формулами (46) та (47). Причому необхідно також використати апроксимацію коефіцієнту тертя в залежності від температури та, у випадку необхідності, від тиску.

При розрахунку температури за формулою (58) з урахуванням виразів (46) і (47) на границях будемо мати по дві невідомі. Внаслідок чого, необхідно спочатку розрахувати значення температур на границях, тобто при  $z = \pm H/2$ . Для цього рівняння (58) можна представити у вигляді системи з двох рівнянь при:  $j = 0$ , що відповідає значенню  $z = -H/2$ , та при  $j = j_m$ , що відповідає значенню  $z = H/2$ . Тоді будемо мати

$$T_{i+1,0} = T_{i,0} + FV_{i,0}r_i - \frac{qK_i}{\lambda\sqrt{AV_{C_i}}} \left( \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{1k,i,0} + \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{2k,i,0} \right) - \frac{q\rho_i}{\lambda\sqrt{AV_{C_i}}} \left( \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{1k,i,0} + \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{2k,i,0} \right), \quad (59)$$

$$T_{i+1,j_m} = T_{i,j_m} + FV_{i,j_m} \cdot r_i - \frac{qK_i}{\lambda\sqrt{AV_{C_i}}} \left( \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{1k,i,j_m} + \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{2k,i,j_m} \right) - \frac{q\rho_i}{\lambda\sqrt{AV_{C_i}}} \left( \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{1k,i,j_m} + \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{2k,i,j_m} \right). \quad (60)$$

Комплекс  $AV_{C_i}$  у рівняннях (59) та (60) являє собою середнє значення від комплексу  $AV_{i,j}$  вздовж координати  $z$ , тобто за індексом  $j$ . Це викликано тим, що, по-перше, величина  $AV_{i,j}$  приймає на границі нульові значення згідно з формулою (11), по-друге, різниця в значеннях величини  $AV_{i,j}$  вздовж координати  $z$  (за індексом  $j$ ) не вносить значного вкладу в зміни температурного поля, внаслідок урахування, згідно з прийнятими припущеннями, тільки перенесення тепла вздовж осі  $z$  за рахунок теплопровідності.

Ураховуючи рівняння (46) та (47) два останні вирази можна подати таким чином

$$T_{i+1,0} = T_{i,0} + FV_{i,0} \cdot r_i - K_{li}(T_{i+1,0} - TH_{K_i}) \cdot \left( \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{1k_{i,0}} + \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{2k_{i,0}} \right) - \left[ K_{2i}(T_{i+1,i_m} - TH_{\rho_i}) - \frac{V_{\omega_i} f_{T_i} \rho_i}{\lambda \sqrt{AV_{C_i}}} \right] \cdot \left( \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{1k_{i,0}} + \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{2k_{i,0}} \right), \quad (61)$$

$$T_{i+1,i_m} = T_{i,i_m} + FV_{i,i_m} \cdot r_i - K_{li}(T_{i+1,0} - TH_{K_i}) \cdot \left( \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{1k_{i,i_m}} + \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{2k_{i,i_m}} \right) - \left[ K_{2i}(T_{i+1,i_m} - TH_{\rho_i}) - \frac{V_{\omega_i} f_{T_i} \rho_i}{\lambda \sqrt{AV_{C_i}}} \right] \cdot \left( \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{1k_{i,i_m}} + \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{2k_{i,i_m}} \right). \quad (62)$$

де  $K_{li} = \frac{\lambda_K}{H_K \lambda \sqrt{AV_{C_i}}}$ ,  $K_{2i} = \frac{\lambda_\rho}{H_\rho \lambda \sqrt{AV_{C_i}}}$ ,  $TH_{K_i}$ ,  $TH_{\rho_i}$  — являють дискретні аналоги, відповідно, температур  $T_K(H_{K_i}, r)$  та  $T_\rho(H_\rho, r)$ .

Перетворимо рівняння (61) та (62) відносно невідомих  $T_{i+1,0}$  та  $T_{i+1,i_m}$

$$T_{i+1,0} \cdot (1 + K_{li} \cdot S_{li,0}) + T_{i+1,i_m} \cdot K_{2i} \cdot S_{2i,0} = Ck_0, \quad (63)$$

$$T_{i+1,0} \cdot K_{li} \cdot S_{li,i_m} + T_{i+1,i_m} \cdot (1 + K_{2i} \cdot S_{2i,i_m}) = Ck_1, \quad (64)$$

де

$$S_{li,j} = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{1k_{i,j}} + \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{2k_{i,j}};$$

$$S_{2i,j} = \sum_{k=0,2,4\dots}^{\infty} B_{1k_{i,j}} + \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} B_{2k_{i,j}};$$

$$Ck_0 = T_{i,0} + FV_{i,0} \cdot r_i - K_{li} \cdot TH_{K_i} \cdot S_{li,0} + \left( K_{2i} \cdot TH_{\rho_i} + \frac{V_{\omega_i} f_{T_i} \rho_i}{\lambda \sqrt{AV_{C_i}}} \right) S_{2i,0}; \quad (65)$$

$$Ck_1 = T_{i,i_m} + FV_{i,i_m} \cdot r_i + K_{li} \cdot TH_{K_i} \cdot S_{li,i_m} + \left( K_{2i} \cdot TH_{\rho_i} + \frac{V_{\omega_i} f_{T_i} \rho_i}{\lambda \sqrt{AV_{C_i}}} \right) S_{2i,i_m}. \quad (66)$$

Таким чином рівняння (63) і (64) утворюють систему з двох лінійних рівнянь з двома невідомими  $T_{i+1,0}$  та  $T_{i+1,i_m}$ . Тому систему можна розв'язати, наприклад, використовуючи з пакета MathCAD функцію *lsolve*.

Розрахунок температурного поля за формулою (58) з урахуванням системи рівнянь (63) та (64) наведений в програмі 2, яка є у авто-рів.

Розподіл температур наведено на рис. 5.

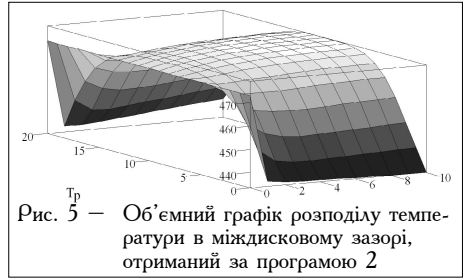


Рис. 5 — Об'ємний графік розподілу температури в міждисковому зазорі, отриманий за програмою 2

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. —М.: Высш. шк., 1966. —406 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. —М.: Наука, 1973. —736 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. Под ред. С.Ф. Фомина. —М.: Наука, 1976. —576 с.

УДК 678.4

Кочишик М.

## МЕТОДИ ПОДГОТОВКИ ПОВЕРХНОСТІ МЕТАЛЛІВ АБО ДРУГИХ СУБСТРАТІВ К КРІПЛЕННЮ РЕЗИНИ С ПОМОЦЬЮ КЛЕІВ CHEMOSIL®

У статті розглядаються способи очищення, механічної і хімічної підготовки поверхні металів або інших субстратів до кріплення гуми за допомогою клеів Chemosil®.

### METHODS OF SURFACE TREATMENT OF METALS OR OTHER SUBSTRATES TO STRENGTHENING RUBBER WITH THE HELP OF GLUES CHEMOSIL®

In a paper the modes of clearing, mechanical and chemical surface treatment of metals or other substratums to strengthening gum with the help of glues Chemosil® are considered.

Продукты с торговой маркой Chemosil® используются для крепления многих эластомеров практически ко всем металлам (железо, медь, алюминий, цинк, свинец, магний и т.д.) и их сплавам (сталь, нержавеющая сталь, латунь, бронза, фосфористая бронза, дуралюмин и т.д.), а также к металлам со специальными покрытиями (оцинкованная, кадмированная или латунированная сталь и т.п.). Их используют также для крепления резин к пластикам — термореактивным смолам (феноло- и меламиноформальдегидные), полимочевине, полиэпоксидам и армированным полиэфирам; термопластам (полиамиды, полиэферы, поликарбонаты, армированные полиэтилен и полипропилен), непластифицированным по-